



# 生物信息学

## 第三章 序列分析的数学基础

# 概率模型



- 概率模型:一个能够通过不同的概率产生不同结果的模型。概率模型可以模拟或者仿真某一类型的所有事件,并且对每个事件赋予一个概率
- 色子模型:一个色子存在6个概率值:  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , 其中掷出*i*的概率为 $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ )。因此:
  - ✿  $p_i \geq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$
- 考虑三次连续的掷色子, 结果为 [1, 6, 3], 则总概率为:  $p_1 p_6 p_3$

# 概率分布



- 考虑连续变量 $x$ ，例如：物体的重量。重量确切为1公斤时的概率为0
- 变量的区间： $P(x_0 \leq x \leq x_1)$
- 当区间无限小  $\rightarrow 0$ 时，上式：
  - ✿  $P(x - \delta x/2 \leq x \leq x + \delta x/2) = f(x) \delta x$
- $f(x)$ 称为概率密度函数
- 因此： $P(X_0 \leq x \leq X_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$  且  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

# 二项分布



- 事件只有两种可能出现的结果。例如掷硬币，正面记为“1”，反面记为“0”
- 则掷硬币 $N$ 次，有 $k$ 次是1的概率为：

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

## 二项分布 (2)



平均数  $E(x) = m$

$$m = \sum_{k=1}^N k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = Np$$

标准方差  $\text{Var } X = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^N (k-m)^2 \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = Np(1-p)$$



# 酵母的全基因组复制

## □ 基因数量的增加

- ✿ 酵母~6000个基因，人类~21,000个基因
- ✿ 单个基因复制、**基因组复制**、染色体片段复制

## □ 复制基因与已有基因的功能关系

- ✿ “新功能形成”：**Ohno one-gene-only speeds-up (OS) model**，一个基因功能不变从而进化慢，另一个需要产生新功能从而进化快
- ✿ “亚功能形成”：**Both-genes speed-up (BS) model**，两个基因都只保留原有基因的部分功能，因此进化速率都快

莱尔的P值大奖：没头脑与不高兴【1】  精选

已有 4073 次阅读 2015-7-23 17:35 | 系统分类:观点评述 [推荐到群组](#)

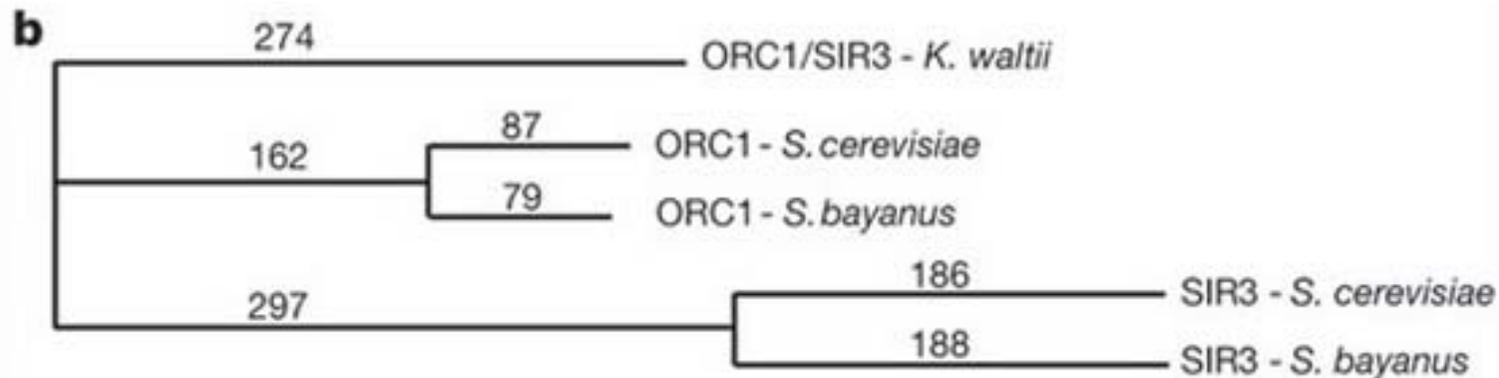
Kellis M, Birren BW, Lander ES. Proof and evolutionary analysis of ancient genome duplication in the yeast *Saccharomyces cerevisiae*. *Nature*. 2004 Apr 8;428(6983):617-24.

# 酵母的全基因组复制



## □ 复制基因分别的进化速率估算

- ✿ 酵母属的两个种 *S. cerevisiae* (酿酒酵母) 和 *S. bayanus* (贝克酵母)：由 *K. waltii* (克鲁雄酵母) 通过基因组复制后，分别进化形成
- ✿ 克鲁雄酵母 **ORC1/SIR3**：在酿酒酵母和贝克酵母中都有两个拷贝
- ✿ **OS模型**：其中一个基因进化速率快
- ✿ **BS模型**：两个基因进化速率都快





## 酵母的全基因组复制

- 作者鉴定了酵母中457对通过全基因组复制产生的复制基因对（总共914个基因）。在酿酒酵母中，其中76对有加速进化的现象。“加速进化”在文中的定义指的是酿酒酵母里氨基酸替代率要比克鲁雄酵母里高50%。在76对有加速进化的复制基因对里，其中只有4对是两个基因都加速进化。因此基因对里只有一个加速进化的为72个基因（ $72/76=95\%$ ）
- 问题：究竟应该怎样算p-value？

# 酵母的全基因组复制



## □ 统计模型

- ❁  $H_0$ 为加速进化的基因随机成对，预期出现不少于4对加速进化
- ❁  $H_1$ 为观察到4对加速进化
- ❁ 457对复制基因共914个基因，其中72+4\*2=80个基因存在加速进化，因此单个基因加速进化的概率= $80/914=0.088$
- ❁ 一对基因同时加速进化的概率为 $0.088*0.088=0.0077$
- ❁ 考虑二项分布，总共457对，观察到4对加速进化
- ❁  $p\text{-value}=\text{BINOMDIST}(4,457,0.0077,\text{TRUE}) = 0.72$

# 泊松分布



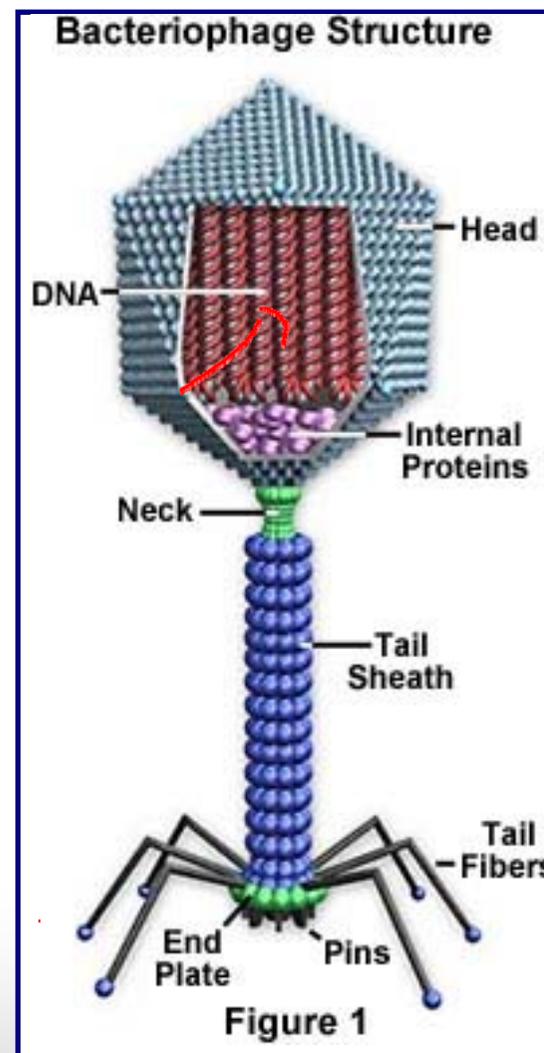
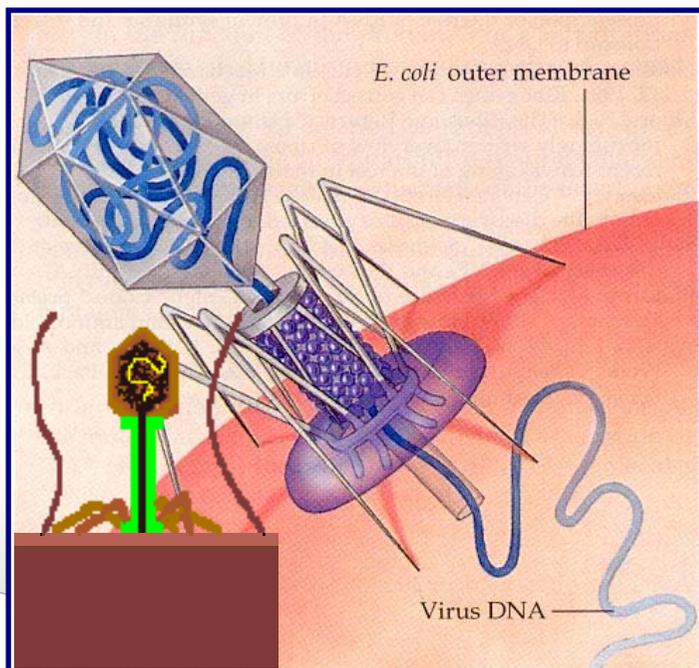
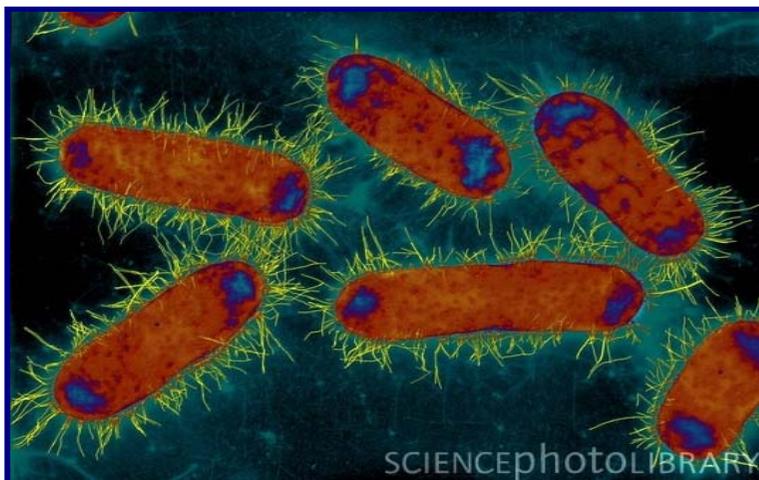
- 稀有事件发生的概率：在一个连续的时间或空间中，稀有离散变量出现的概率
- $N \rightarrow \infty$ ,  $E(x)=\text{Variance}=\mu$

$$f(x) = \frac{e^{-\mu} (\mu)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

$e = 2.71828\dots$

方差等于均值

# 细菌 vs. 噬菌体





# 细菌对噬菌体的应答

- 数十亿细菌与噬菌体混合后，几乎所有的细菌将被杀死
- 仅有很少的细菌能够存活，生长成克隆，并且对噬菌体具有特异性抵抗能力
- 进化：细菌是否有基因？受到噬菌体攻击如何生存？
  - ✿ 拉马克机制：获得性遗传免疫 假说— 细菌在接触到噬菌体后，小概率产生抵抗，不需要基因或遗传物质
  - ✿ 孟德尔机制：突变假说

# 细菌生存的潜在机制



## □ 孟德尔 – 遗传变异

- ✿ 细菌在噬菌体攻击之前已经具有抵抗能力，不需要与病毒相互作用，受到攻击时也不产生新的突变

## □ 拉马克 – 获得性遗传免疫

- ✿ 细菌在受到攻击的时候才产生免疫能力

MUTATIONS OF BACTERIA FROM VIRUS SENSITIVITY  
TO VIRUS RESISTANCE<sup>1,2</sup>

S. E. LURIA<sup>3</sup> AND M. DELBRÜCK  
*Indiana University, Bloomington, Indiana, and  
Vanderbilt University, Nashville, Tennessee*

Received May 29, 1943



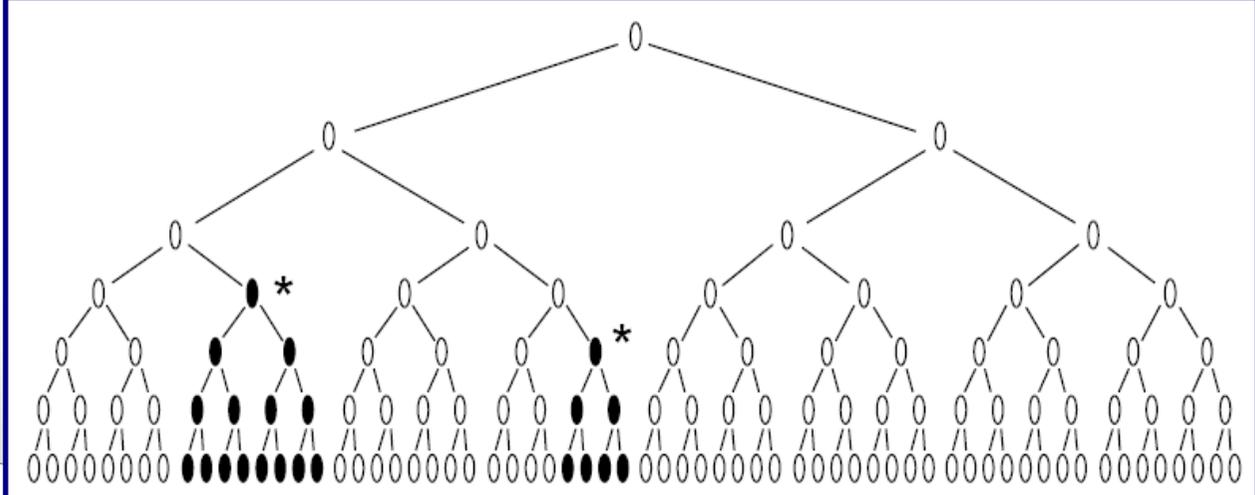
# 细菌生存的潜在机制

## □ 拉马克 – 获得性遗传免疫

- ✿ 具有抵抗能力的细菌在受到攻击时的比例恒定
- ✿ 泊松分布：每一个抵抗是一个独立的事件
- ✿ 只有当与病毒接触时才产生免疫

## □ 孟德尔 – 遗传变异

- ✿ 具有抵抗能力的细菌随时间比例增加
- ✿ 非泊松分布：抵抗性细菌由紧密相关的个体构成群落

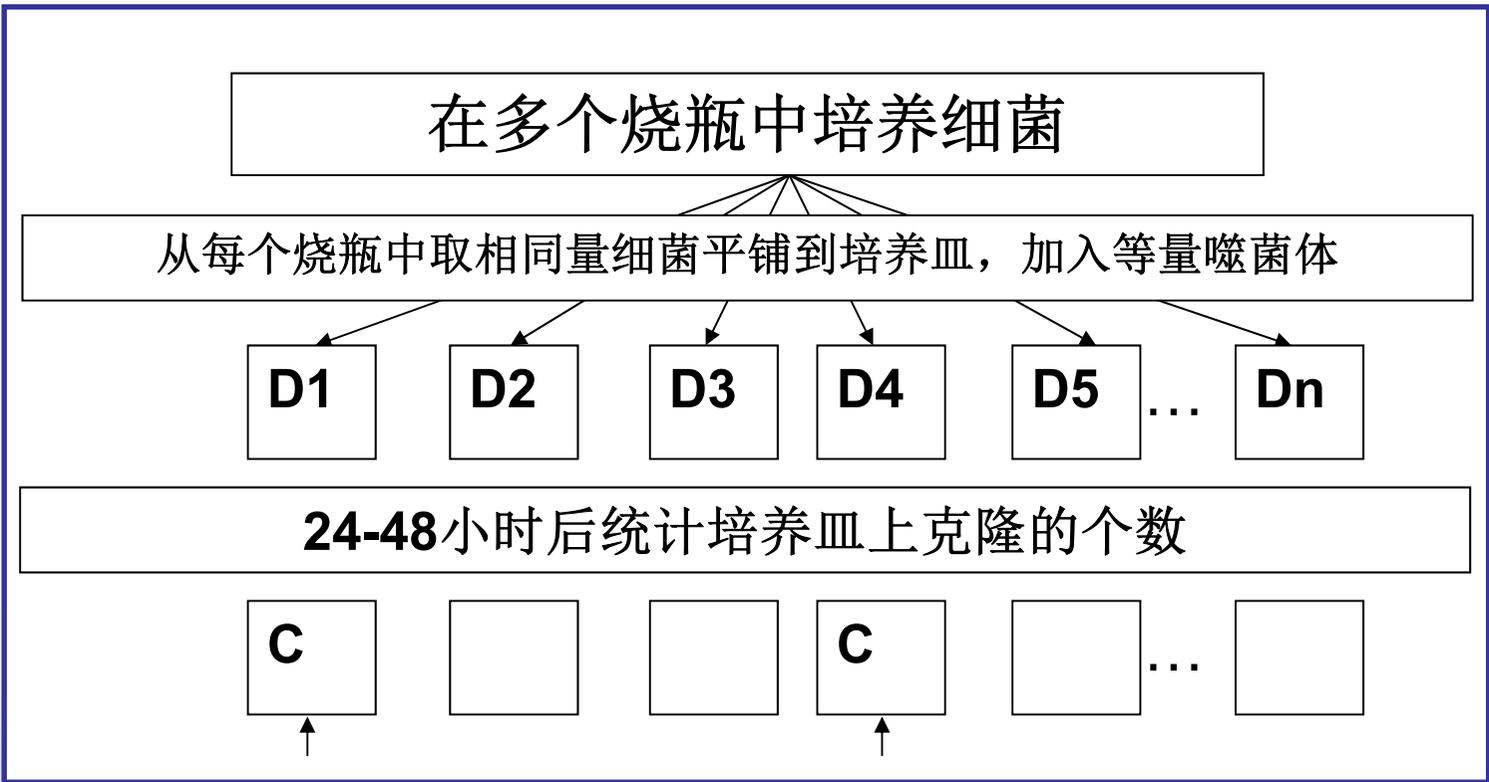




# 那种生存机制是正确的？

## □ 两类实验

- ❁ 有抵抗力的细菌，比例是否随时间上升
- ❁ 观察细菌克隆的个数，看抵抗是否与遗传突变相关





# 结果: 方差分析

## 相似培养条件下可抵抗细菌的克隆个数

| Experiment No.                    | 1                    | 10                   | 11                   | 15                   | 16                   | 17                   | 21a                  | 21b                  |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Number of Cultures                | 9                    | 8                    | 10                   | 10                   | 20                   | 12                   | 19                   | 5                    |
| Volume of Cultures, cc            | 10.0                 | 10.0                 | 10.0                 | 10.0                 | .2*                  | .2*                  | .2                   | 10.0                 |
| Volume of Samples, cc             | .05                  | .05                  | .05                  | .05                  | .08                  | .08                  | .05                  | .05                  |
| Culture No.                       |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 1                                 | 10                   | 29                   | 30                   | 6                    | 1                    | 1                    | 0                    | 38                   |
| 2                                 | 18                   | 41                   | 10                   | 5                    | 0                    | 0                    | 0                    | 28                   |
| 3                                 | 125                  | 17                   | 40                   | 10                   | 3                    | 0                    | 0                    | 35                   |
| 4                                 | 10                   | 20                   | 45                   | 8                    | 0                    | 7                    | 0                    | 107                  |
| 5                                 | 14                   | 31                   | 183                  | 24                   | 0                    | 0                    | 8                    | 13                   |
| 6                                 | 27                   | 30                   | 12                   | 13                   | 5                    | 303                  | 1                    |                      |
| 7                                 | 3                    | 7                    | 173                  | 165                  | 0                    | 0                    | 0                    |                      |
| 8                                 | 17                   | 17                   | 23                   | 15                   | 5                    | 0                    | 1                    |                      |
| 9                                 |                      |                      | 57                   | 6                    | 0                    | 3                    | 0                    |                      |
| 10                                |                      |                      | 51                   | 10                   | 6                    | 48                   | 15                   |                      |
| 11                                |                      |                      |                      |                      | 107                  | 1                    | 0                    |                      |
| 12                                |                      |                      |                      |                      | 0                    | 4                    | 0                    |                      |
| 13                                |                      |                      |                      |                      | 0                    | 0                    | 19                   |                      |
| 14                                |                      |                      |                      |                      | 0                    | 0                    | 0                    |                      |
| 15                                |                      |                      |                      |                      | 1                    | 0                    | 0                    |                      |
| 16                                |                      |                      |                      |                      | 0                    | 0                    | 17                   |                      |
| 17                                |                      |                      |                      |                      | 0                    | 0                    | 11                   |                      |
| 18                                |                      |                      |                      |                      | 64                   | 0                    | 0                    |                      |
| 19                                |                      |                      |                      |                      | 0                    | 0                    | 0                    |                      |
| 20                                |                      |                      |                      |                      | 33                   |                      |                      |                      |
| Average per sample                | 26.8                 | 23.8                 | 62                   | 26.2                 | 11.35                | 30                   | 3.8                  | 48.2                 |
| Variance (corrected for sampling) | 1217                 | 84                   | 3498                 | 2178                 | 694                  | 6620                 | 40.8                 | 1172                 |
| Average per culture               | 5360                 | 4760                 | 12400                | 5240                 | 28.4                 | 75                   | 15.1                 | 8440                 |
| Bacteria per culture              | $3.4 \times 10^{10}$ | $4 \times 10^{10}$   | $4 \times 10^{10}$   | $2.9 \times 10^{10}$ | $5.6 \times 10^8$    | $5 \times 10^9$      | $1.1 \times 10^8$    | $3.2 \times 10^{10}$ |
| Mutation rate                     | $1.8 \times 10^{-6}$ | $1.4 \times 10^{-6}$ | $4.1 \times 10^{-6}$ | $2.1 \times 10^{-6}$ | $1.1 \times 10^{-6}$ | $3.0 \times 10^{-6}$ | $3.3 \times 10^{-6}$ | $3.0 \times 10^{-6}$ |

将方差与均值进行比较

在每一个实验中，可抵抗细菌的波动 (**fluctuation**) 远比均值高，不能归因于采样误差，与获得性遗传免疫的假设冲突

|                                   |      |      |      |      |       |      |      |      |
|-----------------------------------|------|------|------|------|-------|------|------|------|
| Average per sample                | 26.8 | 23.8 | 62   | 26.2 | 11.35 | 30   | 3.8  | 48.2 |
| Variance (corrected for sampling) | 1217 | 84   | 3498 | 2178 | 694   | 6620 | 40.8 | 1172 |

# 例1：鸟枪法的覆盖率



- Lander-Waterman Model
- 近似符合泊松分布 (Poisson distribution)
- 假设：需要测序的BAC长度200 kbp
  - ✿ 总共测序的序列数量：N
  - ✿ 每次测序：500 bp
  - ✿ 每次测序的覆盖率  $p$ ：500/200 kbp=0.0025
  - ✿ 因此：总覆盖率  $C=Np$  (每个点平均覆盖到的次数)
- Y: 测序能够覆盖到点X的次数



Michael Waterman

X

# 鸟枪法：覆盖率



因此：点X被覆盖k次的概率：二项分布~泊松分布

$$P(Y=k) = (N!/(N-k)!k!) p^k(1-p)^{N-k} \approx e^{-c} c^k / k!$$

当点X一次都不被覆盖时， $k=0$ ；此时的概率为：

$$P(Y=0) = e^{-c}$$



# 覆盖率 vs. 准确性

| <u>Fold coverage</u> | <u><math>P_0=e^{-c}</math></u>     | <u><math>P_0 \times 100 =</math></u> | <u>% not sequence</u> | <u>% sequenced</u> |
|----------------------|------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------|--------------------|
| 0.25                 | $P_0=e^{-0.25} = 1/e^{0.25} =$     | 0.78                                 | 78%                   | 22%                |
| 0.50                 | $P_0=e^{-0.50} = 1/e^{0.50} =$     | 0.61                                 | 61%                   | 39%                |
| 0.75                 | $P_0=e^{-0.75} = 1/e^{0.75} =$     | 0.47                                 | 47%                   | 53%                |
| 1                    | $P_0=e^{-1}=1/e^1=1/2.718 =$       | 0.37                                 | 37%                   | 63%                |
| 2                    | $P_0=e^{-2}=1/e^2=1/7.389 =$       | 0.135                                | 13.5%                 | 87.5%              |
| 3                    | $P_0=e^{-3}=1/e^3=1/20.086 =$      | 0.05                                 | 5%                    | 95%                |
| 4                    | $P_0=e^{-4}=1/e^4=1/54.598 =$      | 0.018                                | 1.8%                  | 98.2%              |
| 5                    | $P_0=e^{-5}=1/e^5=1/148.4 =$       | 0.0067                               | 0.6%                  | 99.4%              |
| 6                    | $P_0=e^{-6}=1/e^6=1/403.4 =$       | 0.0025                               | 0.25%                 | 99.75%             |
| 7                    | $P_0=e^{-7}=1/e^7=1/1096.6 =$      | 0.0009                               | 0.09%                 | 99.91%             |
| 8                    | $P_0=e^{-8}=1/e^8=1/2980.95 =$     | 0.0003                               | 0.03%                 | 99.97%             |
| 9                    | $P_0=e^{-9}=1/e^9=1/8103.08 =$     | 0.0001                               | 0.01%                 | 99.99%             |
| 10                   | $P_0=e^{-10}=1/e^{10}=1/22026.5 =$ | 0.000045                             | 0.005%                | 99.995%            |



## 泊松分布：例2

- 某种序列调控信号，在人类基因组上平均每500 kbp一个。随机给一条1 mbp的序列，在上面发现5个这样的信号，完全是随机产生的概率是多少？
- 本例中， $N=3.0 \times 10^9 \text{ bp} \rightarrow \infty$ ,  $E(x)=\mu=2$  (1 mbp)

$$P(5) = f(5) = \frac{e^{-2} (2)^5}{5!} = 0.036 < 0.05$$

- 统计性显著：  $p\text{-value} < 0.05$



# 超几何分布

- 与二项式分布的区别：不放回抽样
- 例：有N个球，其中红球M个，白球N-M个，每次拿出一个球再放回，总共n次，其中有m个球是红球的概率为（二项式分布）：

$$P(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$p = M/N$$

# 超几何分布



- 上例改为：有N个球，其中红球M个，白球N-M个，每次拿出一个球不放回，总共n次，其中有m个球是红球的概率为：

$$P(m) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

并且， $0 \leq m \leq M < N$

# 超几何分布



- 上例再改为：有N个球，其中红球M个，白球N-M个，每次拿出一个球不放回，总共n次，其中有至少有m个球是红球的概率为：

$$p\text{-value} = P(m' \geq m) = \sum_{m'=m}^n \frac{\binom{M}{m'} \binom{N-M}{n-m'}}{\binom{N}{n}}$$

并且， $0 \leq m \leq M < N$

# 超几何分布



- 上例再改为：有N个球，其中红球M个，白球N-M个，每次拿出一个球不放回，总共n次，其中有最多有m个球是红球的概率为：

$$p\text{-value} = P(m' \leq m) = \sum_{m'=0}^m \frac{\binom{M}{m'} \binom{N-M}{n-m'}}{\binom{N}{n}}$$

并且， $0 \leq m \leq M < N$



## 超几何分布：例

- 研究者从26873个人类蛋白质中预测了2264个具有某种特定功能的底物，并进行进一步的分析。其中，有421个人类蛋白质具有某种功能结构域D，而在预测的2264个底物中，有94个蛋白质具有结构域D
- 问：结构域D在2264个底物中是显著出现，显著不出现，还是随机出现？



## 超几何分布：例 (2)

- $N = 26873$ ;  $n = 2264$ ;  $M = 421$ ;  $m = 94$ ;
- $(m/n)/(M/N) = 2.65$
- 因此，问题转化：在26873个人的蛋白质中，抓出2264个蛋白质，其中至少有94个蛋白质具有功能结构域的概率是多少？

$$p\text{-value} = P(m' \geq m) = \sum_{m'=m}^n \frac{\binom{M}{m'} \binom{N-M}{n-m'}}{\binom{N}{n}}$$

# 结果



C:\ 命令提示符

```
C:\>hypergeometric.pl  
N= 26873  
n= 421  
M= 2264  
m= 94  
This is Enrichment_ratio!  
2.65024172632886  
This is p-value!  
1.15913702840128e-018  
  
C:\>
```

# 统计显著性



- 考虑两个假设 $H_0$ （空假设）和 $H_1$ （备择假设）
  - ✿  $H_0$ 代表随机情况下事件出现的概率
  - ✿  $H_1$ 代表当前出现事件的概率
  - ✿ 如果 $H_0/H_1 \ll 0.05$ ，则接受 $H_1$ 而不接受 $H_0$
- 统计显著： $p\text{-value} < 0.05$
- 超几何分布的 $p\text{-value}$ 
  - ✿ “完全随机状态下”事件出现的概率，即 $p\text{-value} = H_0$
  - ✿  $H_1 = 1$

# Ronald Fisher



- ❑ 英国统计学家、进化生物学家、数学家、遗传学家和优生学家
- ❑ 数量遗传学的三个创始人之一
- ❑ 1918年批评孟德尔的数据过于完美
- ❑ **Richard Dawkins**: 达尔文之后最伟大的生物学家



# Fisher's Exact Test



□ 超几何分布的精确概率计算：2X2表

|        | B1  | B2  | Totals |
|--------|-----|-----|--------|
| A1     | a   | b   | a+b    |
| A2     | c   | d   | c+d    |
| Totals | a+c | b+d | n      |

## 因此，超几何分布计算公式



$$\begin{aligned} p\text{-value} &= \frac{\frac{(a+c)!}{a!c!} \times \frac{(b+d)!}{b!d!}}{\frac{n!}{(a+b)!(c+d)!}} \\ &= \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{n!a!b!c!d!} \end{aligned}$$

# 如上例



- $a+b+c+d=26873$ ,
- $c+d=2264$ ,
- $b+d=421$ ,
- $d=94$ ,
- 因此：

Fisher's Exact Test  
http://www.matforsk.no/ola/fisher.htm

TABLE = [ 24282 , 327 , 2170 , 94 ]  
Left : p-value = 1  
Right : p-value = 1.1591370284761953e-18  
2-Tail : p-value = 1.1591370284761953e-18

COMPUTE

24282 327  
2170 94

CLEAR TABLE

CLEAR OUTPUT

[INTRODUCTION](#)

Created by

<http://www.langsrud.com/fisher.htm>

[German version](#)

# Fisher's Exact Test: 再例



- 假设，我们调查了100个学生，比较是否男生比女生更喜欢玩电子游戏。数据统计如下：

|    | 玩游戏 | 不玩游戏 |
|----|-----|------|
| 男生 | 45  | 15   |
| 女生 | 27  | 13   |

**$p\text{-value} > 0.05$ ，统计性不显著！**

# 随机序列模型



- 假设一个残基 $a$ 随机出现的概率为 $q_a$ ，并且该概率独立于其它残基而存在
- 则对于一段蛋白质或DNA序列： $x_1x_2\cdots x_n$ ，整个序列出现的概率为： $q_{x_1}q_{x_2}\cdots q_{x_n} = \prod_{i=1}^n q_{x_i}$



# 最大似然性估计

- 概率模型的参数通常是从大的可靠的数据集，即训练集中估算得到
- 例如：通过对Swissprot数据库分析，各个物种中，20种氨基酸出现的频率
- 估算的参数作为概率模型的参数，即最大似然性估计：充分使用了训练集的数据
- 一般的，给定一个模型，包括参数 $\theta$ 以及数据集 $D$ ，则对于参数 $\theta$ 的最大似然性估计，要保证 $P(D|\theta)$ 的最大化

# 几个主要真核物种中的氨基酸频率



| AA    | <i>S.cerevisiae</i> |       | <i>S.pombe</i> |       | <i>C.elegans</i> |       | <i>D.melanogaster</i> |       | <i>M.musculus</i> |        | <i>H.sapiens</i> |        |
|-------|---------------------|-------|----------------|-------|------------------|-------|-----------------------|-------|-------------------|--------|------------------|--------|
|       | Num.                | Per.  | Num.           | Per.  | Num.             | Per.  | Num.                  | Per.  | Num.              | Per.   | Num.             | Per.   |
| A     | 182589              | 5.51% | 150066         | 6.24% | 644995           | 6.37% | 1018991               | 7.35% | 1951767           | 6.90%  | 1917786          | 6.98%  |
| C     | 43791               | 1.32% | 35268          | 1.47% | 204160           | 2.02% | 274295                | 1.98% | 646608            | 2.29%  | 613701           | 2.23%  |
| D     | 189958              | 5.73% | 128878         | 5.36% | 542678           | 5.36% | 714203                | 5.15% | 1363975           | 4.82%  | 1291018          | 4.70%  |
| E     | 213550              | 6.45% | 156945         | 6.52% | 669038           | 6.61% | 880507                | 6.35% | 1957893           | 6.92%  | 1913306          | 6.96%  |
| F     | 149792              | 4.52% | 110809         | 4.61% | 476721           | 4.71% | 484995                | 3.50% | 1060957           | 3.75%  | 1014225          | 3.69%  |
| G     | 165520              | 5.00% | 118620         | 4.93% | 541945           | 5.35% | 849857                | 6.13% | 1823069           | 6.45%  | 1805724          | 6.57%  |
| H     | 71464               | 2.16% | 54332          | 2.26% | 234586           | 2.32% | 372816                | 2.69% | 737425            | 2.61%  | 725024           | 2.64%  |
| I     | 217427              | 6.56% | 147805         | 6.14% | 617883           | 6.10% | 678404                | 4.90% | 1242781           | 4.39%  | 1207472          | 4.40%  |
| K     | 240119              | 7.25% | 154387         | 6.42% | 642638           | 6.35% | 778288                | 5.62% | 1608966           | 5.69%  | 1527230          | 5.56%  |
| L     | 316667              | 9.56% | 237640         | 9.88% | 872362           | 8.61% | 1252315               | 9.04% | 2835685           | 10.03% | 2753451          | 10.02% |
| M     | 69484               | 2.10% | 49557          | 2.06% | 265730           | 2.62% | 324098                | 2.34% | 628623            | 2.22%  | 605750           | 2.20%  |
| N     | 201584              | 6.08% | 125243         | 5.21% | 492995           | 4.87% | 658568                | 4.75% | 1013396           | 3.58%  | 985966           | 3.59%  |
| P     | 145487              | 4.39% | 113453         | 4.72% | 497816           | 4.92% | 765595                | 5.53% | 1734018           | 6.13%  | 1712723          | 6.23%  |
| Q     | 129461              | 3.91% | 91663          | 3.81% | 422211           | 4.17% | 716329                | 5.17% | 1339988           | 4.74%  | 1309438          | 4.77%  |
| R     | 146367              | 4.42% | 117272         | 4.87% | 526718           | 5.20% | 774601                | 5.59% | 1583353           | 5.60%  | 1562613          | 5.69%  |
| S     | 299056              | 9.03% | 227040         | 9.44% | 819366           | 8.09% | 1158270               | 8.36% | 2371524           | 8.38%  | 2270931          | 8.27%  |
| T     | 197230              | 5.95% | 132228         | 5.50% | 594292           | 5.87% | 794141                | 5.73% | 1529233           | 5.41%  | 1505568          | 5.48%  |
| V     | 185494              | 5.60% | 145399         | 6.04% | 630910           | 6.23% | 815956                | 5.89% | 1738580           | 6.15%  | 1636629          | 5.96%  |
| W     | 35117               | 1.06% | 26958          | 1.12% | 111273           | 1.10% | 140654                | 1.02% | 343331            | 1.21%  | 362072           | 1.32%  |
| Y     | 113063              | 3.41% | 82252          | 3.42% | 318131           | 3.14% | 403645                | 2.91% | 771962            | 2.73%  | 752485           | 2.74%  |
| Total | 3313220             |       | 2405815        |       | 10126448         |       | 13856528              |       | 28283134          |        | 27473112         |        |



# 最大似然性的缺点

- 过拟合 (over-fitting)
- 例如：掷色子3次，得到  $[6, 6, 6]$ ，根据最大似然性的模型，则  $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=0, p_6=1$

# 条件、连接、边缘的概率



- 考虑两个色子 $D_1$ 和 $D_2$
- 条件概率：用色子 $D_1$ 掷出 $i$ 的概率为 $P(i|D_1)$ ；用色子 $D_2$ 掷出 $i$ 的概率为 $P(i|D_2)$
- 连接概率：随机挑出一个色子的概率 $P(D_j)$ ,  $j=1,2$ ；挑到第 $j$ 色子且掷出一个 $i$ 的概率（条件概率）为：  
 $P(i, D_j) = P(D_j)P(i|D_j)$ 。一般定义为：  
✿  $P(X, Y) = P(X|Y)P(Y)$
- 边缘概率：当条件或者连接概率已知的时候，可以计算边缘概率并去掉一个变量：

$$P(X) = \sum_Y P(X, Y) = \sum_Y P(X | Y)P(Y)$$

# 故事及问题



- 某天, Prof. Gene来到拉斯维加斯去旅游, 一时兴起, 就去了一个赌场玩两把。游戏是掷色子。但是, 据说这个赌场的荷官不老实, 使用了两种色子, 其中99%的色子是正常 (fair) 的, 而1%的色子 (loaded) 则使得出现6的概率为50%
- 那么,  $P(6|D_{\text{loaded}})$ 和 $P(6|D_{\text{fair}})$ 是多少? 而 $P(6, D_{\text{loaded}})$ 和 $P(6, D_{\text{fair}})$ 呢? 随机拿到一个色子掷出6的概率是多少?

# 故事及问题



- 某天, Prof. Gene来到拉斯维加斯去旅游, 一时兴起, 就去了一个赌场玩两把。游戏是掷色子。但是, 据说这个赌场的荷官不老实, 使用了两种色子, 其中99%的色子是正常 (fair) 的, 而1%的色子 (loaded) 则使得出现6的概率为50%
- 那么,  $P(6|D_{\text{loaded}})$ 和 $P(6|D_{\text{fair}})$ 是多少? 而 $P(6, D_{\text{loaded}})$ 和 $P(6, D_{\text{fair}})$ 呢? 随机拿到一个色子掷出6的概率是多少?

# Probability



- $P(6|D_{\text{loaded}})=0.5$
- $P(6|D_{\text{fair}})=1/6$
- $P(6, D_{\text{loaded}})=0.5*0.01=0.005$
- $P(6, D_{\text{fair}})=(1/6)*0.99$
  
- 随机拿到一个色子掷出6的概率:
- $P(6, D_{\text{loaded}}) + P(6, D_{\text{fair}})$

# 新问题



- **Prof. Gene**拿起一个色子，连续掷了三次，都是6，因此，他判断这个色子是loaded。他这样的判断可靠吗？如果不可靠，那么，怎样才能判断色子可能是loaded呢？

# 贝叶斯理论及模型比较



□ 前向概率（prior probability）：

✿  $P(D_{\text{loaded}})=0.01$  和  $P(D_{\text{fair}})=0.99$

□ 后向概率（posterior probability）：

✿  $P(D_{\text{loaded}}|3\text{个}6)$

□ 根据条件概率公式：

✿  $P(X, Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X) \Rightarrow$

$$P(X | Y) = \frac{P(Y | X)P(X)}{P(Y)}$$

在本例中：



$$P(D_{loaded} | n \uparrow 6) = \frac{P(n \uparrow 6 | D_{loaded})P(D_{loaded})}{P(n \uparrow \times 6)}$$

其中， $n = 3$

结果：



$$P(D_{loaded} | 3个6) = \frac{(0.5^3)(0.01)}{(0.5^3)(0.01) + \left(\frac{1}{6}\right)^3(0.99)} = 0.21$$

不能判断是否为**loaded**色子！**Prof. Gene**判断的不合理！

# 怎样才能认为是loaded色子?



- $P(D_{\text{loaded}} | n \text{ 个 } 6)$
- 四个6:  $P=0.45$
- 五个6:  $P=0.71 > 0.5$
- 当连续掷出5个6以上时, 我们认为可能是loaded!
- ...



## 例2: DNA序列模体

- 假设，基因组上存在一种未知的X-box的DNA序列（例如转录子结合位点、启动子或沉默子等），包含4个bp。Prof. Gene为了验证这种X-box序列，实验分析了1000个4 bp的DNA序列，他发现，其中100个4 bp的DNA序列为真实的、有功能的X-box序列。对这100个X-box的序列分析，他发现：

|   | 第一位 | 第二位 | 第三位 | 第四位 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| A | 70% | 10% | 1%  | 5%  |
| T | 10% | 10% | 97% | 5%  |
| C | 10% | 70% | 1%  | 5%  |
| G | 10% | 10% | 1%  | 85% |

# 预测：新的序列



□ Prof. Gene拿到4条4 bp的序列：

✿ ACTG

✿ ATTT

✿ AGTG

✿ CCGA

□ 计算预测这些序列是不是可能的X-box序列

# 对于给定4 bp的序列



$$P(X - box | X_1 X_2 X_3 X_4) = \frac{P(X - box) \prod_i q_{xi}^{x-box}}{P(X - box) \prod_i q_{xi}^{x-box} + P(nonX - box) \prod_i q_{xi}^{nonX - box}}$$

其中：

$$P(X-box)=0.1$$

$$P(nonX-box)=0.9$$

$$q_{xi}^{nonX-box} = 0.25$$

# 对于ACTG序列



$$P(X - box | ACTG) = \frac{0.1 * 0.7 * 0.7 * .097 * 0.85}{0.1 * 0.7 * 0.7 * .097 * 0.85 + 0.9 * (0.25)^4}$$
$$= 0.91$$

# Perl编程：DNA模体的预测



```
my $DNA1="A";
my $DNA2="C";
my $DNA3="T";
my $DNA4="G";

my $Pp=0.01; my $Pn=0.99; my $Pn_all=0.99*0.25*0.25*0.25*.025;

if ($DNA1 eq "A") { $Pp=$Pp*0.7;}
elsif ($DNA1 eq "T") { $Pp=$Pp*0.1;}
elsif ($DNA1 eq "C") { $Pp=$Pp*0.1;}
elsif ($DNA1 eq "G") { $Pp=$Pp*0.1;}

if ($DNA2 eq "A") { $Pp=$Pp*0.1;}
elsif ($DNA2 eq "T") { $Pp=$Pp*0.1;}
elsif ($DNA2 eq "C") { $Pp=$Pp*0.7;}
elsif ($DNA2 eq "G") { $Pp=$Pp*0.1;}

if ($DNA3 eq "A") { $Pp=$Pp*0.01;}
elsif ($DNA3 eq "T") { $Pp=$Pp*0.97;}
elsif ($DNA3 eq "C") { $Pp=$Pp*0.01;}
elsif ($DNA3 eq "G") { $Pp=$Pp*0.01;}

if ($DNA4 eq "A") { $Pp=$Pp*0.05;}
elsif ($DNA4 eq "T") { $Pp=$Pp*0.05;}
elsif ($DNA4 eq "C") { $Pp=$Pp*0.05;}
elsif ($DNA4 eq "G") { $Pp=$Pp*0.85;}

my $P=$Pp/($Pp+$Pn_all);
print $P, "\n";
```

# 预测结果!



□  $P(X\text{-box}|\text{ACTG})=0.91!$

□  $P(X\text{-box}|\text{ATTT})=0.08$

□  $P(X\text{-box}|\text{AGTG})=0.60$

□  $P(X\text{-box}|\text{CCGA})=0.0009!$

# Homework 2#: 蕾丝短裤之谜



豆瓣小组 精选 文化 行摄 娱乐 时尚 生活 科技

### 在男友家发现一条不是自己的内裤。。。



来自: [野樱桃\(我们是一只蚂蚁\)](#) 2013-10-15 11:01:29

有一个大抽屉是专门放我的衣物的 里面原来遗留他的一两件衣服 我也没检查过 那天打开抽屉惊现一条内裤不是我的 问他他说就是我的。。。 其实我是很相信他的 问了我身边的姐们 她们说肯定是我的 我容易迷糊肯定忘记了 但是那真的不是我的啊。。。 这问题一直没解决 然后就这样了 总觉得有个结 也不知道怎么办

博文

CY呼唤肖子：蕾丝短裤之谜 👑精选

已有 2042 次阅读 2014-2-24 16:47 | 个人分类: 课件科普 | 系统分类: 教学心得

在 求教：贝叶斯定理（乳腺癌例） 评论4, 王春艳 说：“我都回来了，肖子还端着不下来。很感兴趣老邪的问题，可惜手头上没书，以后也弄本翻翻，要是肖子能赏脸耗力帮大家把问题整理出来讨论，那是要非常感谢滴”。

感谢肖子，及时解答了老邪的疑问。希望响应cy妹妹的呼唤，接着回答老邪的疑问：怎么样讲贝叶斯定理，最容易被同学理解无误。我想，就从这个乳腺癌例讲起。silver取4个用历史先验案例表达的概率，和4个导出的边际概率，分别为：

|     | 真有癌 | 无癌  | 总计   | 边际概率          |
|-----|-----|-----|------|---------------|
| 阳性： | 11  | 99  | 110  | $p(\text{阳})$ |
| 阴性： | 3   | 887 | 890  | $p(\text{阴})$ |
| 总计： | 14  | 986 | 1000 |               |

边际概率： $P(\text{有})$   $P(\text{无})$

注意这里，人们习惯是说真阳性、假阴性表示真有癌。但如果按真假排列两列，边际概率就便成对角线的和了。折衷表



李小文

[解除好友](#) [给我留言](#)

[打个招呼](#) [发送消息](#)

作者的精选博文

- 贝叶斯定理：走桃花运和遭殃
- 费希尔对贝叶斯的批判和后者
- 蕾丝短裤之谜—揭秘
- 闹鬼：男生不宜
- 关于国家重点实验室开放基金

作者的其他最新博文 [全部](#)

## ❑ 李小文院士博文：发现男友衣柜里有一条蕾丝内裤！男友出轨了吗？

## ❑ 先验概率：

🌸  $P(\text{出})=0.04$

来自国家统计局数据

🌸  $P(\text{裤}|\text{出})=0.5$

来自对男友细心程度的估计

🌸  $P(\text{裤}|\text{未})=0.05$

来自对男友各种可能辩护合理性的估计